Часть III

Раздел 5

I. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ДУ) I-го порядка.

Задание №1. Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка.

1а. $xyy' = x^2 + y^2$

2а. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

3а. $y' = (x - y)/(x + y)$

4а. $2xy\,dx + (y^2 - x^2)dy = 0$

5а. $y' = -\dfrac{y}{x + y}$

6а. $y' = \dfrac{4x + y}{x - y}$

7а. $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{x/y}}{x^2}$

8а. $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

9а. $y' = \dfrac{8x + 5y}{5x - 2y}$

10а. $\left(x - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$

11а. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$

12а. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$

13а. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$

14а. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$

15а. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$

16а. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

17а. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$

18а. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$

19а. $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

20а. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

21а. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

1б. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$

2б. $y' - \dfrac{y}{x} = x + 1$

3б. $y' + \dfrac{y}{x} + \dfrac{2\ln x}{x} = 0$

4б. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$

5б. $y' + \dfrac{y}{x} = x + 1$

6б. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$

7б. $y' - y\operatorname{tg}x = \dfrac{2x}{\cos x}$

8б. $y' + y\operatorname{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$

9б. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x}$

10б. $y' - 2(x + 1)y = e^{(x+1)^2}$

11б. $y' + xy = -x^3$

12б. $y' - 4xy = -4x^3$

13б. $y' + 4xy = -2x^3$

14б. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2}y = 1$

15б. $y' + y\operatorname{tg}x = \cos^2 x$

16б. $y' - y\operatorname{ctg}x = 2x\sin x$

17б. $y' - y\cos x = \sin 2x$

18б. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}$

19б. $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$

20б. $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x$

21б. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x + 1}{x}e^x$

22а. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

22б. $y' + \frac{y}{x} = 3x$

23а. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$

23б. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^2}$

24а. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$

24б. $y' = \frac{y}{x + y^2}$

II. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.

Задание №2. Даны дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

2.1. $yy'' - y'^2 = y^2 y'$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$
2.2. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$
2.3. $xy'' = \ln x + 1$	$y(1) = 0; \quad y'(1) = 0$
2.4. $y'' = x \Big/ \left(\sqrt{(1 - x^2)^3} \right)$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$
2.5. $xy'' - y' - x^2 = 0$	$y(1) = 4/3; \quad y'(1) = 3$
2.6. $y'' - y'\mathrm{ctg}x = \sin x$	$y(\pi/2) = 1; \quad y'(\pi/2) = \pi/2$
2.7. $xy'' - 2y' = 2x^4$	$y(1) = 1/5; \quad y'(1) = 5$
2.8. $y'' + y'\mathrm{tg}x = \cos x$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$
2.9. $xy'' + y' = 4x^3$	$y(1) = 1/4; \quad y'(1) = 2$
2.10. $xy'' - y' = x^2 \cos x$	$y(\pi/2) = 1; \quad y'(\pi/2) = \pi/2$
2.11. $y^3 y'' = y^4 - 16$	$y(0) = 2\sqrt{2}; \quad y'(0) = \sqrt{2}$
2.12. $yy'' - e^y y' = 0$	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$
2.13. $y'y'' = 2y$	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$
2.14. $yy' = (y')^2$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$
2.15. $(y - 2)y'' = 2(y')^2$	$y(0) = 3; \quad y'(0) = 1$
2.16. $(y + 1)^2 y'' = (y')^3$	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$
2.17. $2y'y'' = (y')^2$	$y(-1) = 4; \quad y'(-1) = 1$
2.18. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$	$y(1) = \pi/2; \quad y'(1) = 1$
2.19. $y^2 y'' = (y')^2$	$y(-1) = -1/2; \quad y'(-1) = 1$
2.20. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$	$y(0) = \sqrt{2}/2; \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}$
2.21. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0$	$y(0) = 0; \quad y'(0) = 5$
2.22. $4y^3 y'' = y^4 - 1$	$y(0) = \sqrt{2}; \quad y'(0) = 1/2\sqrt{2}$
2.23. $y'' = 8\sin^3 y \cos y$	$y(1) = \pi/2; \quad y'(1) = 2$
2.24. $y'' = 72y^3$	$y(2) = 1; \quad y'(2) = 6$

Задание №3.

Найти:

а) частное решение линейного неоднородного уравнения 2-го порядка;
б) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

3.1. а) $y'' - 2y' - 8y = 16y^2 + 2$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 5$
б) $y'' - 2y' - 8y = 5e^{4x}$

3.2. а) $y'' + y' = x^2e^x$ $\quad y(0) = 2;\ \ y'(0) = 0$
б) $y'' + y' = x + 1$

3.3. а) $y'' + y' = \cos x$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 1$
б) $y'' + y' = 3e^{-x}$

3.4. а) $y'' + y' = 3\sin x$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 0$
б) $y'' + y' = x^2 - 1$

3.5. а) $y'' + 4y = 3x\cos x$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2$
б) $y'' + 4y = 3\sin 2x$

3.6. а) $y'' - y' - 2y = 10e^{2x}$ $\quad y(0) = 2;\ \ y'(0) = 5$
б) $y'' - y' - 2y = 3x^2 + x$

3.7. а) $y'' - 2y' = 2x + 1$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 1$
б) $y'' - 2y' = 2x^2$

3.8. а) $y'' - 4y = 4x\sin 2x$ $\quad y(0) = 5/4;\ \ y'(0) = 0$
б) $y'' - 4y = 3e^{2x}$

3.9. а) $y'' + y' = x^2$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1$
б) $y'' + y' = 3\sin x$

3.10. а) $y'' - 3y' = 3e^{3x}$ $\quad y(0) = 2;\ \ y'(0) = 4$
б) $y'' - 3y' = 5\cos x$

3.11. а) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin x$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2$
б) $y'' - 4y' + 5y = x - 1$

3.12. а) $y'' + y' - 2y = x\cos x - 3\sin x$ $\quad y(0) = 0{,}6;\ \ y'(0) = 1{,}3$
б) $y'' + y' - 2y = 5e^x$

3.13. а) $y'' - y = (3x - 1)e^{-x}$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 3/2$
б) $y'' - y = x^2 + 4$

3.14. а) $y'' + 4y = 6\sin 2x$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 3/2$
б) $y'' + 4y = x^3 - 1$

3.15. а) $y'' - 5y' = 10x + 3$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 4$
б) $y'' - 5y' = 3e^x$

3.16. а) $y'' + y' - 2y = 4e^{2x} - 2x + 1$ $\quad y(0) = 3;\ \ y'(0) = 5$
б) $y'' + y' = x^2 + x - 1$

3.17. а) $y'' + y' + y = x(1 + x)e^x$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1$
б) $y'' + y' = 3x^2 + 4$

3.18. а) $y'' + 4y = 8\sin 2x$ $\quad y(0) = 1;\ \ y'(0) = 2$
б) $y'' + 4y = 5e^{2x}$

3.19. а) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x}$ $\quad y(0) = 0;\ \ y'(0) = 0$

б) $y'' + 4y = 5\sin x + 3\cos x$

3.20. а) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$ $\qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = 3$

б) $y'' - 3y' = xe^{3x}$

3.21. а) $y'' - 2y' = e^{x}$ $\qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 5/2$

б) $y'' - 2y' = x^2 + 8x - 1$

3.22. а) $y'' + 5y' + 6y = -5e^{2x}$ $\qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = -4$

б) $y'' + 5y' + 6y = 5\cos x$

3.23. а) $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$ $\qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$

б) $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x - \sin x$

3.24. а) $y'' + 4y = \sin 2x$ $\qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

б) $y'' - 3y' = (x + 3)e^{3x}$

III. Система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задание №4. Дана система линейных дифференциальных уравнений I-го порядка с постоянными коэффициентами. Требуется найти ее общее решение методом исключения.

4.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ $\qquad$ 4.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 8y \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ $\qquad$ 4.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$ $\qquad$ 4.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ $\qquad$ 4.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}$ $\qquad$ 4.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$ $\qquad$ 4.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y - 2x \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 6y \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

IV. Составить дифференциальное уравнение и найти решение.

Задание №5.

5.1. Найти кривую, проходящую через точку (4, 4), для которой угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

5.2. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью OX делится пополам в точке пересечения с осью OY. Известно, что искомая кривая проходит через точку P(1, 2).

5.3. Найти линию, проходящую через точку $M_o(6, 4)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси OY имеет длину, равную a=10, и образует острый угол с положительным направлением оси OY.

5.4. Найти линию, проходящую через точку $M_o(1, 1)$, если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в соотношении 1:2 (считая от оси OY).

5.5. Найти линию, проходящую через точку $M_o(2, -1)$, если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью OY делится в точке пересечения с осью абсцисс в соотношении 1:1.

5.6. Найти линию, проходящую через точку $M_o(1, 2)$, если отрезок любой ее касательной, заключенной между осями координат, делится в точке касания в соотношении 1:1.

5.7. Найти линию, проходящую через точку $M_o(2, e)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси OX имеет проекцию на ось OX обратно пропорциональную абсциссе точки M. Коэффициент пропорциональности k равен -2.

5.8. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(4, 3)$, у которой подкасательная есть среднее арифметическое координат точек касания M (подкасательная TP, где точка P – проекция точки M на ось OX, точка T – точка пересечения касательной с осью OX).

5.9. Найти линию, проходящую через точку $M_o(1, 1)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси OY имеет проекцию на ось OY, равную 1.

5.10. Найти кривую, для которой сумма длин отрезка касательной к подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания M. Кривая проходит через точку $M_o(1, 1)$, коэффициент пропорциональности $k = \sqrt{2}$ (подкасательная TP, где точка P – проекция точки M на ось OX, точка T – точка пересечения касательной с осью абсцисс).

5.11. Пользуясь прямоугольными координатами, найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку. Взять падающие лучи параллельными оси OX.

5.12. Составит уравнение кривой, проходящей через точку $M_o(a, a)$ и обладающей следующим свойством: если в любой точке M(x, y) кривой с ординатой PM провести касательную до пересечения с осью OY в точке T, то площадь трапеции OTMP равна a^2.

5.13. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором OM любой точки M(x, y) кривой, касательной MP к этой точке и осью OX, равна 2. Кривая проходит через точку $M_o(2, -2)$. Найти уравнение этой кривой.

5.14. Составить уравнение кривой, проходящей через начало координат, зная, что середина отрезка ее нормали от любой точки кривой M до оси OX находится на параболе $y^2 = ax$.

5.15. Определить кривую, проходящую через точку $M_o(1, 1)$, у которой отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью OX равен отрезку OT, где точка T – точка пересечения касательной с осью OX.

5.16. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_o(1, 1)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат равен квадрату абсциссы точки касания.

5.17. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(3, 0)$, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

5.18. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(1, 1)$ и обладающую тем свойством, что величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

5.19. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(1, 1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси OY равна квадрату абсциссы точки касания.

5.20. Определить кривую, проходящую через точку $M_o(0, 1)$, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси OY, к радиус-вектору равна 1.

5.21. Найти кривую, у которой подкасательная имеет постоянную длину a. Кривая проходит через точку $M_o(a, e)$ (подкасательная TP, где точка P – проекция точки M на ось OX, точка T – точка пересечения касательной с осью абсцисс).

5.22. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(2, 1)$, для которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

5.23. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_o(3, 5)$ и обладающую тем свойством, что в любой точке M нормальный вектор $\overrightarrow{MN}$с концом на оси OY имеет длину, равную 5, и образует острый угол с положительным направлением оси OY.

5.24. Найти кривую, проходящую через точку $M_o(1, 4)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$с концом на оси OY имеет проекцию на ось OY, равную 2.

Раздел 6

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Двойной интеграл.

Задания для контрольной работы.

1. Изменить порядок интегрирования*

1.1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx$

1.2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

1.3. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx$

1.4. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx$

1.5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f dy$

1.6. $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f dx$

1.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f dx$

1.8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$

1.9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy$

1.10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^4}-2}^{0} f dy$

1.11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f dy$

1.12. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$

1.13. $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f dx$

1.14. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy$

1.15. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx$

1.16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx$

1.17. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx$

1.18. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx$

1.19. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^4}}^{0} f dy$

1.20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx$

1.21. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx$

1.22. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{x^2} f dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy$

1.23. $\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin y} f dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f dy$

1.24. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f dx$

2. Вычислить:

2.1. $$\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$

2.2. $$\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$

2.3. $$\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$

2.4. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

2.5. $$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

2.6. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$

2.7. $$\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$

2.8. $$\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$

2.9. $$\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$

2.10. $$\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$

2.11. $$\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$

2.12. $$\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$

2.13. $$\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

2.14. $$\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$

2.15. $$\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$

2.16. $$\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy$$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$

2.17. $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^2y^2\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$

2.18. $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^2y^2\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$

2.19. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^2y^2\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$

2.20. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^2y^2\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$

2.21. $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$

2.22. $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$

2.23. $\iint\limits_D \left(xy - x^3y^3\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$

2.24. $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$
$D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

3.1. $y^2 - 2y + x^2 = 0$
$y^2 - 4y + x^2 = 0$
$y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y = \sqrt{3}x$

3.2. $x^2 - 4x + y^2 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 = 0$
$y = 0,\ \ y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

3.3. $y^2 - 6y + x^2 = 0$
$y^2 - 8y + x^2 = 0$
$y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y = \sqrt{3}x$

3.4. $x^2 - 2x + y^2 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 = 0$
$y = 0,\ \ y = x$

3.5. $y^2 - 8y + x^2 = 0$
$y^2 - 10y + x^2 = 0$
$y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ \ y = \sqrt{3}x$

3.6. $x^2 - 4x + y^2 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 = 0$
$y = 0,\ \ y = x$

3.7. $y^2 - 4y + x^2 = 0$
$y^2 - 6y + x^2 = 0$
$y = x,\ \ x = 0$

3.8. $x^2 - 2y + y^2 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 = 0$
$y = 0,\ \ y = \sqrt{3}x$

3.9. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$, $y=x$, $x=0$

3.10. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

3.11. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x=0$

3.12. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

3.13. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x=0$

3.14. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

3.15. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x=0$

3.15. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

3.17. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

3.18. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$

3.19. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$

3.20. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$, $y=0$, $y=x$

3.21. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$, $y=x$, $y=0$

3.22. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$, $y=0$, $y=\sqrt{3}x$

3.23. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=x$, $y=0$

3.24. $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$, $y=0$, $y=\sqrt{3}x$

2. Тройной интеграл

4. Вычислить:

4.1. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=x \\ z=0,\ z=1 \end{cases}$

4.2. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=2,\ y=\pi,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.3. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=-2,\ y=4x \\ z=0,\ z=2 \end{cases}$

4.4. $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=-1,\ y=2,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.5. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}(3xy)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=2x,\ y=0 \\ z=0,\ z=36 \end{cases}$

4.6. $\iiint\limits_V y^2z\cos(xyz)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=\pi,\ z=2 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.7. $\iiint\limits_V y^2\cos\frac{\pi}{4}xy\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=0,\ z=-\pi^2 \end{cases}$

4.8. $\iiint\limits_V x^2z\sin\frac{xyz}{4}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=2\pi,\ z=4 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.9. $\iiint\limits_V y^2e^{-xy}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=-2,\ y=4x \\ z=0,\ z=1 \end{cases}$

4.10. $\iiint\limits_V 2y^2ze^{2xyz}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=1,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.11. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=4x \\ z=0,\ z=8 \end{cases}$

4.12. $\iiint\limits_V x^2z\,\mathrm{sh}(xyz)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=2,\ y=1,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.13. $\iiint\limits_V y^2e^{xy/2}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=2,\ y=-2x \\ z=0,\ z=-1 \end{cases}$

4.14. $\iiint\limits_V y^2z\cos\frac{xyz}{4}dxdydz$

$V=\begin{cases} x=3,\ y=1,\ z=2\pi \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.15. $\iiint\limits_V y^2\cos\frac{\pi xy}{2}\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=-x \\ z=0,\ z=2\pi^2 \end{cases}$

4.16. $\iiint\limits_V 2x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=-1,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.17. $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=2x \\ z=0,\ z=\pi^2 \end{cases}$

4.18. $\iiint\limits_V 2x^2 z\,\mathrm{sh}(2xyz)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=2,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2} \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.19. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}(2xy)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=-1,\ y=x,\ y=0 \\ z=0,\ z=8 \end{cases}$

4.20. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\frac{xyz}{2}\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=4,\ z=\pi \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.21. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(xy)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=x \\ z=0,\ z=2 \end{cases}$

4.22. $\iiint\limits_V y^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=1,\ y=1,\ z=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

4.23. $\iiint\limits_V x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)dxdydz$

$V=\begin{cases} x=2,\ y=x,\ y=0 \\ z=0,\ z=\pi \end{cases}$

4.24. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{9}\,dxdydz$

$V=\begin{cases} x=9,\ y=1,\ z=2\pi \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

5. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

5.1. $x^2+y^2=2y$
$z=\frac{5}{4}-x^2,\ z=0$

5.2. $x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$

5.3. $x^2+y^2=8\sqrt{2}x$
$z=x^2+y^2-64$
$z=0\ (z\geq 0)$

5.4. $x^2+y^2+4x=0$
$z=8-y^2,\ z=0$

5.5. $x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=9x$
$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ z=0$
$y=0\ (y\leq 0)$

5.6. $x^2+y^2=6\sqrt{2y}$
$z=x^2+y^2-36$
$z=0\ (z\geq 0)$

5.7. $x^2+y^2=2y$

$z=\frac{9}{4}-x^2,\ z=0$

5.9. $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0$

$z=x^2+y^2-4$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.11. $x^2+y^2=7x,\ x^2+y^2=10x$

$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ z=0$

$y=0\ (y\le 0)$

5.13. $x^2+y^2=2y$

$z=\frac{13}{4}-x^2,\ z=0$

5.15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x$

$z=x^2+y^2-36$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.17. $x^2+y^2=4x$

$z=12-y^2,\ z=0$

5.19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}x$

$z=x^2+y^2-16$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.21. $x^2+y^2=4y,\ x^2+y^2=7y$

$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ z=0$

5.23. $x^2+y^2+2x=0$

$z=\frac{17}{4}-y^2,\ z=0$

5.8. $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y$

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$

5.10. $x^2+y^2=4x$

$z=10-y^2,\ z=0$

5.12. $x^2+y^2=8\sqrt{2y}$

$z=x^2+y^2-64$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.14. $x^2+y^2=3y,\ x^2+y^2=6y$

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$

5.16. $x^2+y^2=2\sqrt{2y}$

$z=x^2+y^2-4$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.18. $x^2+y^2=8x,\ x^2+y^2=11y$

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$

5.20. $x^2+y^2=4y$

$z=4-x^2,\ z=0$

5.22. $x^2+y^2=4\sqrt{2y}$

$z=x^2+y^2-16$

$z=0\ (z\ge 0)$

5.24. $x^2+y^2=9x,\ x^2+y^2=12x$

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$

$y=0\ (y\ge 0)$

6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

6.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $\dfrac{9z}{2}=x^2+y^2$

6.2. $z=15\sqrt{9-x^2-y^2}/2$, $z=\dfrac{17}{2}-x^2-y^2$

6.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}$

6.4. $z=\dfrac{\sqrt{64-x^2-y^2}}{2},\ z=1$, $x^2+y^2=60$ (внутри цилиндра)

6.5. $z=\sqrt{\dfrac{16}{9}-x^2-y^2}$, $2z=x^2+y^2$

6.6. $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=10-x^2-y^2$

6.7. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}$

6.8. $z=\sqrt{100-x^2-y^2},\ z=6$, $x^2+y^2=51$ (внутри цилиндра)

6.9. $z=21\sqrt{x^2+\dfrac{y^2}{2}}$, $z=\dfrac{23}{2}-x^2-y^2$

6.10. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $6z=x^2+y^2$

6.11. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}}$

6.12. $z=\sqrt{81-x^2-y^2},\ z=5$, $x^2+y^2=45$ (внутри цилиндра)

6.13. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $\dfrac{3z}{2}=x^2+y^2$

6.14. $z=6\sqrt{x^2+y^2}$, $z=16-x^2-y^2$

6.15. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}$

6.16. $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=4$, $x^2+y^2=39$ (внутри цилиндра)

6.17. $z=\sqrt{114-x^2-y^2}$, $18z=x^2+y^2$

6.18. $z=3\sqrt{x^2-y^2}/2$, $z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2$

6.19. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}$

6.20. $z=\sqrt{49-x^2-y^2},\ z=3$, $x^2+y^2=33$ (внутри цилиндра)

6.21. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $9z=x^2+y^2$

6.22. $z=9\sqrt{x^2+y^2}$, $z=22-x^2-y^2$

6.23. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$

6.24. $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=2$, $x^2+y^2=27$ (внутри цилиндра)

7. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела.

7.1. $64(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4$, $y=0,\ z=0\ (y\ge 0,\ z\ge 0)$, $\mu=5(x^2+y^2)/4$

7.2. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$, $(x^2+y^2\le 1),\ x=0\ (x\ge 0)$, $\mu=4|z|$

7.3. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z$, $x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\mu=10x$

7.4. $x^2+y^2=\dfrac{16}{49}z^2,\ x^2+y^2=\dfrac{4}{7}z$, $x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\mu=80yz$

7.5. $x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=4z^2$, $x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, $\mu=20z$

7.6. $36(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1$, $x=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\mu=\dfrac{5}{6}(x^2+y^2)$

7.7. $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4$, $(x^2+y^2\le 4)$, $\mu=2|z|$

7.8. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z$, $x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\mu=5x$

7.9. $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2,\ x^2+y^2=\dfrac{2}{5}$, $x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, $\mu=28xz$

7.10. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2$, $x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, $\mu=6z$

7.11. $25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4$, $x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, $\mu=2(x^2+y^2)$

7.12. $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4$, $(x^2+y^2\le 4),\ y=0\ (y\ge 0)$, $\mu=|z|$

7.13. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=90y$

7.14. $x^2+y^2=\frac{z^2}{25},\ x^2+y^2=\frac{z}{5}$
$x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=14yz$

7.15. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2$
$x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$
$\mu=10z$

7.16. $9(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$
$\mu=5(x^2+y^2)/3$

7.17. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$
$(x^2+y^2\le 1)$
$\mu=6|z|$

7.18. $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=z$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=10y$

7.19. $x^2+y^2=\frac{z^2}{49},\ x^2+y^2=\frac{z}{7}$
$x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=10xz$

7.20. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=4z^2$
$x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$
$\mu=10z$

7.21. $16(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$
$\mu=5(x^2+y^2)$

7.22. $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4$
$(x^2+y^2\le 4)$
$\mu=|z|$

7.23. $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=4z$
$x=0,\ y=0,\ z=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=5y$

7.24. $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2=z$
$x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$
$\mu=35yz$

Раздел 7

РЯДЫ.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

1. Числовой ряд исследовать на абсолютную и условную сходимость. Для функционального ряда найти область сходимости и исследовать на границе области.

1 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n(n+2)}(x+3)^n$

2 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{3^{n-1}\sqrt{n}(x-1)^n}$

3 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+1}\frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}(x+5)^{n-1}$

4 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$ в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n+1}\frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt[3]{n}(x-3)^n}{3^{n^2-1}\cdot\sqrt{n^3+2}}$

5 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}n^3 tg^5\frac{\pi}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$ д) $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{3^{n+1}\left(x-\frac{5}{2}\right)^n}{5^n\sqrt{n^3+n-3}}$

6 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$ в) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3^{n-3}(x+2)^n}$

7 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!(x+4)^n}{(2n)!}$

8 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3(2+\sin(n\pi/2))}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

9 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$

10 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}arctg\frac{n+3}{n^2+5}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+7)^n}{\sqrt[n]{n}}$

11 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}}{(n+1)(n+3)(x+8)^n}$

12 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(n^2+1)}(25x^2+1)^n$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$

13 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-7)^{n+1}}{(n+1)(n+5)3^n}$

14 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n^3+2}\frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$ д) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$

15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$ в) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n2}(x-3)^n$

16 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,arctg\frac{1}{n^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt{n+1}}{n7^{n+1}(x+6)^n}$

17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$ в) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+e^x)}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n n!(x+3)^n}{(n+1)^n}$

18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$ в) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-x)^{1/3}}$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}7^{n-1}}{\sqrt{n^2+2n}(x-5)^n}$

19 а) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)}-1\right)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}$ в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}(-1)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x^2}$ д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}$

20

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cos\frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}(-1)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1{,}5)^n}{\sqrt[4]{n^3+3n+1}\cdot 3^n}$

21

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}(-1)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(x-1)}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$

22

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$ в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}(-1)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-e^x)(n^2+1)}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}5^{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^3+1}(x-0{,}5)^n}$

23

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{1/n}-1\right)^2$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$ в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}(-1)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n x^{3n}\arcsin\frac{x}{3n}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}5^n\cdot\sqrt[5]{n}(x+3)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^2+3}\cdot 2^{n-1}}$

24

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}(-1)^n$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+1/n)}{\sqrt{x-e}}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

2. Найти сумму ряда.

1

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}.$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n-1}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4n^2+9n+5)x^{n+1}$

2

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}.$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n^2+7n+4)x^n$

3

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)x^{n+2}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+n+1\right)x^{n+3}$

4

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n-2}{\left(n^2-1\right)(n-2)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+4n+3\right)x^{n+2}$

5

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+5n+3\right)x^{n}$

6

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n\left(n^2-1\right)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^n}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+5n+3\right)x^{n+1}$

7

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+8n+5\right)x^{n+2}$

8

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^2-4\right)}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+8n+5\right)x^{n}$

9

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+2}}{16^n(2n+1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+7n+5\right)x^{n+1}$

10

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+7n+5\right)x^n$

11

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(2n-1)x^{n+2}$

12

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+2)(n+1)n}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)x^n$

13

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-1\right)x^n$

14

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+5n+4\right)x^{n+1}$

15

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2+7n+4\right)x^n$

16

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n^2-1)}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-2\right)x^{n+1}$

17

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2+2n+1\right)x^n$

18

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+5n-6}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n-1\right)x^{n+1}$

19

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$ б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n-1)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n+2\right)x^{n+2}$

20

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{(n+1)x^{n+1}}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+4n+3\right)x^{n+1}$

21

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+5n+4\right)x^{n+2}$

22

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]x^{2n}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-2n+1\right)x^n$

23

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n+1}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2-2n-1\right)x^{n+1}$

24

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1}x^{2n+1}$ г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(2n+1)x^{n+2}$

3. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

1) $y'=\cos x+y^2$; $y(0)=1$
2) $y'=y+xe^{y}$; $y(0)=0$
3) $y'=e^x+y^2$; $y(0)=0$
4) $y'=x^2+y^3$; $y(0)=1$
5) $y'=y+y^2$; $y(0)=3$
6) $y'=xy+e^y$; $y(0)=0$
7) $y'=2e^y-xy$; $y(0)=0$
8) $y'=y^3+x^3$; $y(0)=1/2$
9) $y'=\sin x+y^2$; $y(0)=1$
10) $y'=y^2x+3x^2$; $y(0)=1$
11) $y'=e^x+y$; $y(0)=4$
12) $y'=\cos x+xy$; $y(0)=1$
13) $y'=x^2+y^2$; $y(0)=2$
14) $y'=ye^x+x^2$; $y(0)=0$
15) $y'=\sin x+(1/2)y^2$; $y(0)=1$
16) $y'=x^2+y^3$; $y(0)=1/3$
17) $y'=2e^y+xy$; $y(0)=0$
18) $y'=e^x+y^3$; $y(0)=3$
19) $y'=x+x^2+y^2$; $y(0)=5$
20) $y'=e^{3x}+xy^2$; $y(0)=1$
21) $y'=y^3-3x^3$; $y(0)=1$
22) $y'=e^{2x}+y^2$; $y(0)=0$
23) $y'=e^{3y}-xy^2$; $y(0)=0$
24) $y'=3x^2-y^3$; $y(0)=2$

4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном интервале (a,b).

1) $f(x)=2-3x,\quad(-5,5)$;
2) $f(x)=x+1,\quad(-1,1)$
3) $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\langle x\langle 0\\ 3 & 0\le x\langle\pi\end{cases}$; $(-\pi,\pi)$
4) $f(x)=x^2+1,\quad(-2,2)$
5) $f(x)=(\pi-x)/2,\quad(-\pi,\pi)$;
6) $f(x)=\begin{cases}(1/4)x & -1\langle x\langle 0\\ x & 0\le x\langle 1\end{cases}$; $(-1,1)$
7) $f(x)=9-4x,\quad(-\pi,\pi)$;
8) $f(x)=\begin{cases}4 & -\pi\langle x\langle 0\\ -1 & 0\le x\langle\pi\end{cases}$; $(-\pi,\pi)$
9) $f(x)=(1/2)x+3,\quad(-1,1)$;
10) $f(x)=|1-x|,\quad(-2,2)$;
11) $f(x)=x^2,\quad(0,2\pi)$;
12) $f(x)=5x+2,\quad(-\pi,\pi)$;
13) $f(x)=x-2,\quad(-3,3)$;
14) $f(x)=1+|x|,\quad(-1,1)$;
15) $f(x)=\begin{cases}0 & -2\langle x\langle 0\\ x & 0\le x\langle\pi\end{cases}$; $(-2,2)$
16) $f(x)=|x|,\quad(-\pi,\pi)$;
17) $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\langle x\langle 0\\ x & 0\le x\langle\pi\end{cases}$; $(-\pi,\pi)$
18) $f(x)=9-2x,\quad(-1,1)$;
19) $f(x)=\begin{cases}2 & -\pi\langle x\langle 0\\ 1 & 0\le x\langle\pi\end{cases}$; $(-\pi,\pi)$
20) $f(x)=\begin{cases}1 & -2\langle x\langle 0\\ x & 0\le x\langle 2\end{cases}$; $(-2,2)$
21) $f(x)=1-|x|,\quad(-3,\ 3)$;
22) $f(x)=3-x^2,\quad(-5,5)$;

23) $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\langle x\langle 0 \\ 1-x & 0\le x\langle\pi \end{cases}$; $(-\pi,\pi)$

24) $f(x)=5-2x, \quad (-4,4)$

5. Методом Фурье решить уравнение колебаний конечной струны длины 1 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **с граничными условиями** $u(0,t)=u(I,t)=0$ **и начальными условиями** $u(x,0)=\varphi(x)$; $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\varpi(x) \quad (0\le x\le 1)$**.**

1) $a^2=1$; $l=2$; $\varphi(x)=x(2-x)$; $\psi(x)=0$

2) $a^2=9$; $l=4$; $\varphi(x)=\begin{cases} -x & 0\le x\le 2 \\ x-4 & 2\le x\le 4 \end{cases}$, $\psi(x)=0$

3) $a^2=16/9$; $l=4$; $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=3x(x-4)$

4) $a^2=1/4$; $l=3/2$; $\varphi(x)=x(x-(3/2))$; $\psi(x)=0$

5) $a^2=2$; $l=2$; $\varphi(x)=0$; $\psi(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ x-2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$

6) $a^2=25$; $l=5$; $\varphi(x)=3x(x-5)$; $\psi(x)=0$

7) $a^2=1$; $l=1$; $\varphi(x)=0$; $\psi(x)=(x-1)x$

8) $a^2=4/9$; $l=8$; $\varphi(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 4 \\ 8-x & 4\le x\le 8 \end{cases}$, $\psi(x)=0$

9) $a^2=4$; $l=3$; $\varphi(x)=0$; $\psi(x)=x(3-x)$

10) $a^2=9/4$; $l=3/2$; $\varphi(x)=x(x-(3/2))$; $\psi(x)=0$

11) $a^2=36$; $l=5$; $\varphi(x)=x(x-5)$; $\psi(x)=0$

12) $a^2=16$; $l=4$; $\varphi(x)=0$; $\psi(x)=(x-4)x$

Методом Фурье решить уравнение теплопроводности стержня длины 1 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **(найти распределение тепла в любой момент времени t вдоль стержня, имеющего теплопроницаемую боковую поверхность) с граничными условиями** $u(0,t)=u(I,t)=0$ $u(x,0)=\varphi(x)$; $(0\le x\le 1)$**.**

13) $a^2=16$; $l=2$; $\varphi(x)=x(2-x)$

14) $a^2=100$; $l=5$; $\varphi(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 5/2 \\ 5-x & 5/2\le x\le 5 \end{cases}$

15) $a^2=25$; $l=1$; $\varphi(x)=x(1-x)$

16) $a^2=4$; $l=15$; $\varphi(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 3 \\ (3/4)(15-x); & 3\le x\le 15 \end{cases}$

17) $a^2=1/9$; $l=6$; $\varphi(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 3 \\ 6-x & 3\le x\le 6 \end{cases}$

18) $a^2=9$; $l=2$; $\varphi(x)=x(x-2)$

19) $a^2 = 1$; $l = 7$; $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0{,}8(7-x); & 2 \le x \le 7 \end{cases}$

20) $a^2 = 9/4$; $l = 4$; $\varphi(x) = 3x(x-4)$

21) $a^2 = 25$; $l = 10$; $\varphi(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 5 \\ 10-x & ; 5 \le x \le 10 \end{cases}$

22) $a^2 = 64$; $l = 20$; $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 4 \\ 20-x & ; 4 \le x \le 20 \end{cases}$

23) $a^2 = 1/16$; $l = 8$; $\varphi(x) = 5x(3-x)$

24) $a^2 = 50$; $l = 3$; $\varphi(x) = \begin{cases} x & ; 0 \le x \le 4 \\ 8-x & ; 4 \le x \le 8 \end{cases}$

Раздел 8

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Задания для контрольной работы

1. Вычислить циркуляцию Г векторного поля $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура L.

1.1. $\vec{F} = \ln\left(x^2+y^2\right)\left(2\vec{i}-\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\le 0\right)$

1.2. $\vec{F} = -x^2y\vec{i}+xy\vec{j},\ L: x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \left(y\ge 0\right)$

1.3. $\vec{F} = -xy\vec{i}+xy^2\vec{j},\ L:\ y^2=4x,\ x=1,\ y=0\ \left(y\le 0\right)$

1.4. $\vec{F} = \ln\left(1/(x^2+y^2)\right)\left(\vec{i}+2\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ \left(x\le 0,\ y\ge 0\right)$

1.5. $\vec{F} = \ln\left(x^2+y^2\right)\left(3\vec{i}+4\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\le 0\right)$

1.6. $\vec{F} = \ln\left(x^2+y^2\right)\left(\vec{i}+3\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ \left(x\le 0,\ y\le 0\right)$

1.7. $\vec{F} = \left(x^2-2y^2\right)\vec{i}+\left(2y+x^2\right)\vec{j},\ L: x=1/2,\ y=0,\ y^2=8x\ \left(y\ge 0\right)$

1.8. $\vec{F} = \sqrt{x^2+y^2}\left(-2\vec{i}+\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\le 0\right)$

1.9. $\vec{F} = \sqrt{x^2+y^2}\left(\vec{i}+3\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ \left(x\le 0,\ y\le 0\right)$

1.10. $\vec{F} = e^{x^2+y^2}\left(\vec{i}+2\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right)$

1.11. $\vec{F} = \left(x^2-2y^2\right)\vec{i}+\left(2y-x^2\right)\vec{j},\ L: x=1,\ \ y^2=x,\ x=0$

1.12. $\vec{F} = \left(x^2+3y^2\right)\vec{i}+\left(3x^2-y^2\right)\vec{j},\ L: y=4x^2,\ \ y=4,\ x=0$

1.13. $\vec{F} = \left(3x-y^2\right)\vec{i}+\left(2y+x^2\right)\vec{j},\ L: y=-x^2,\ \ y=-4,\ x=0$

1.14. $\vec{F} = \sqrt{x^2+y^2}\left(-\vec{i}+2\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ \left(x\le 0,\ y\le 0\right)$

1.15. $\vec{F} = \left(1-2y^2\right)\vec{i}+\left(y-3x^2\right)\vec{j},\ L: y=-2x^2,\ \ y=-2,\ y=-2$

1.16. $\vec{F} = e^{-x^2-y^2}\left(\vec{i}+2\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ \left(x\ge 0,\ y\le 0\right)$

1.17. $\vec{F} = \left(x-2y^2\right)\vec{i}+\left(y+3x^2\right)\vec{j},\ L: y=-3x^2,\ \ y=-3\ \left(x\le 0\right)$

1.18. $\vec{F} = \left(2x+y^2\right)\vec{i}+\left(1-3x^2\right)\vec{j},\ L: y=2x^2,\ \ y=2\ \left(x\le 0\right)$

1.19. $\vec{F} = \ln\left(x^2+y^2\right)\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25\ \left(x\le 0,\ y\ge 0\right)$

1.20. $\vec{F} = \sqrt{x^2+y^2}\left(\vec{i}+3\vec{j}\right),\ L: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16\ \left(x\le 0,\ y\le 0\right)$

1.21. $\vec{F}=\sqrt{x^2+y^2}\,(3\vec{i}-2\vec{j}),\ L: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0,\ y\ge 0)$

1.22. $\vec{F}=(x-4y^2)\vec{i}+(y+2x^2)\vec{j},\ L: y=-2x^2,\ \ y=-4\ \ (x\le 0)$

1.23. $\vec{F}=(2x+y^2)\vec{i}+(3y-x^2)\vec{j},\ L: y=-4x^2,\ \ y=-1$

1.24. $\vec{F}=(3x+y^2)\vec{i}+(1-2x^2)\vec{j},\ L: y=3x^2,\ \ y=\sqrt{3}$

2. Найти поток P векторного поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность σ.

2.1. $\vec{F}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k},\ \sigma: z=x^2+y^2,\ z=1,\ x=0,\ y=0$

2.2. $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+(z^2+y^2)\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1$

2.3. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=z^2\ \ (z\ge 0)$

2.4. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1,\ z=0\ \ (z\ge 0)$

2.5. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=z,\ z=0\ \ (z\ge 0)$

2.6. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1,\ z=0\ \ (z\ge 0)$

2.7. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=z,\ z=0\ \ (z\ge 0)$

2.8. $\vec{F}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1$

2.9. $\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0)$

2.10. $\vec{F}=x^2\vec{i}+xy\vec{j}+3z\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=z^2,\ z=1-x^2-y^2$

2.11. $\vec{F}=(zx+y)\vec{i}+(xy-z)\vec{j}+(x^2+yz)\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=2,\ z=0,\ z=1$

2.12. $\vec{F}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=z^2\ \ (z\ge 0)$

2.13. $\vec{F}=z\vec{i}+yz\vec{j}-xy\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=1$

2.14. $\vec{F}=(zx+y)\vec{i}-(2y-x)\vec{j}-(x^2+y^2)\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1,\ \ z=0\ \ (z\le 0)$

2.15. $\vec{F}=x(x+y)\vec{i}+y(y+z)\vec{j}+z(x+z)\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2=z^2\ \ (z\ge 0)$

2.16. $\vec{F}=3x^2\vec{i}-2x^2y\vec{j}+(1-2x)\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1$

2.17. $\vec{F}=-x\vec{i}+2y\vec{j}+yz\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=z,\ z=4$

2.18. $\vec{F}=y\vec{i}+2yz\vec{j}+2z^2\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=1-z,\ z=0$

2.19. $\vec{F}=xz\vec{i}+z\vec{j}+y\vec{k},\ \sigma: x^2+y^2=1-z,\ z=0$

2.20. $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + yz\vec{k},\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1 - x^2 - y^2$

2.21. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + 2xy\vec{j} + z^2\vec{k},\ \sigma: x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2},\ z = 0\ (z \ge 0)$

2.22. $\vec{F} = y^2x\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^3\vec{k}/3,\ \sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 0\ (z \ge 0)$

2.23. $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + yz\vec{k},\ \sigma: x^2 + y^2 = z^2,\ z = 4$

3. Найти производную скалярного поля $U(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3.1. $U = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz,\ S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1,\ M(1,1,1)$

3.2. $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},\ S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0,\ M(2,4,4)$

3.3. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z,\ S: x^2 + y^2 = 24z,\ M(3,4,1)$

3.4. $U = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz,\ S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1,\ M(1,1,1)$

3.5. $U = x^2\,y/4 - \sqrt{x^2 + 5z^2},\ S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,\ M(-1,1,1)$

3.6. $U = xz^2 - \sqrt{x^3y},\ S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,\ M(3,3,4)$

3.7. $U = 7\ln(1 + x^2) - 4xyz,\ S: 7x^2 - 4y^2 4z^2 = 7,\ M(1,1,1)$

3.8. $U = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z),\ S: x^2 + 2y - z^2 = 2,\ M(-1,1,1)$

3.9. $U = \ln\left(x + \sqrt{y^2/3 + z^2}\right),\ S: x^2 + y^2 + 2z^2 = 20,\ M\left(1, -\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$

3.10. $U = 2\sqrt{x + y} + y + \operatorname{arctg} z,\ S: x^2 - y^2 + 16z^2 = 16,\ M(8,8,1)$

3.11. $U = x/y - yz,\ S: x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -1,\ M(1,-1,1)$

3.12. $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z},\ S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16,\ M(1,-2,4)$

3.13. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z,\ S: x^2 + y^2 = 24z,\ M(3,4,1)$

3.14. $U = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x},\ S: x^2 - y^2 + z^2 = 4,\ M(1,1,-2)$

3.15. $U = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right),\ S: 2x^2 + y^2 - z^2 = -5,\ M(1,-3,4)$

3.16. $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2},\ S: z = x^2 - y^2,\ M(1,1,0)$

3.17. $U = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2},\ S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0,\ M(0,-3,4)$

3.18. $U=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2}$, $S: x^2-6x+9y^2+z^2=4z+23$, $M(3,0,-4)$

3.19. $U=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$, $S: x^2-2y^2+z^2=z-1$, $M(1,1,0)$

3.20. $U=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$, $S: x^2-y^2+2\pi^2 z/3=0$, $M(\pi/2,\ 3\pi/2,\ 3)$

3.21. $U=x\left(\ln y-\operatorname{arctg} z\right)$, $S: x^2+2y^2+z^2=20$, $M(1,1,0)$

3.22. $U=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$, $S: x^2-y^2+z^2=9$, $M(1,5,-2)$

3.23. $U=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$, $S: 3x^2-y^2+z^2=1$, $M\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3\right)$

3.24. $U=xy-\sqrt{xz+y^2}$, $S: x^2+y^2-z^2=2$, $M(-1,1,0)$