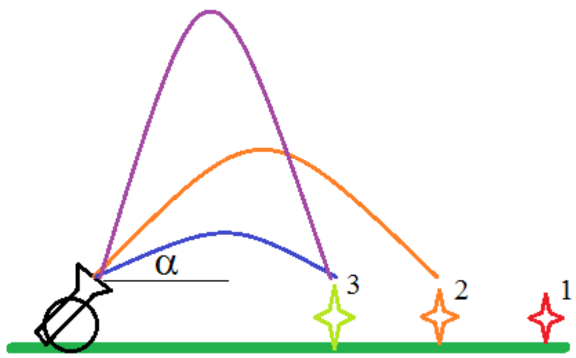
Решение домашнего задания №5

Законы Ньютона

Задача 5.1. На горизонтальной поверхности располагается орудие, способное сообщать снаряду начальную скорость V. На расстоянии L от него на поверхности земли находится мишень. Под каким углом следует произвести выстрел, для того, чтобы снаряд поразил мишень?

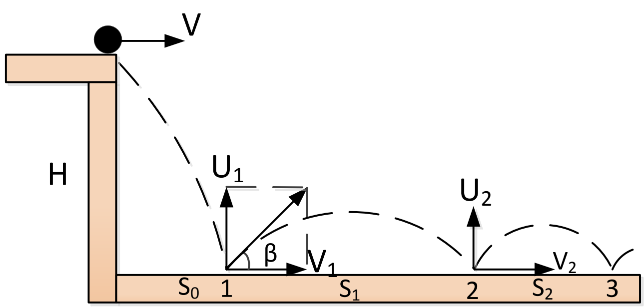
<u>Идея решения:</u> Очевидно, что ответ задачи сильно зависит от того, на каком расстоянии от орудия расположена мишень. Если это расстояние больше максимальной (для заданной начальной скорости снаряда) дальности полета, задача не имеет решения, если расстояние равно максимальной дальности – стрелять нужно под углом 45^0. Если расстояние будет меньше... Нужно обратиться за консультацией либо к артиллеристам, либо – к уравнениям и формулам.

1		Рисунок, поясняющий решение задачи 1- решений нет 2- имеется одно решение 3- имеется два решения
2	$\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$	Уравнение (в векторной форме) для равноускоренного движения в случае тела, выпущенного из начала координат
3	$\begin{cases} r_x(t) = V\cos\alpha\, t \\ r_y(t) = V\sin\alpha\, t - gt^2/2 \end{cases}$	Результат проектирования (2) на координатные оси (горизонтальную и вертикальную)
4	$r_y(T) = 0 \;\Rightarrow \mathrm{T} = (2V/g)\sin\alpha$	Время полета снаряда
5	$L(\alpha) = r_x(T) = V\cos\alpha\, T = \frac{V^2}{g}\sin(2\alpha)$	Дальность полета снаряда.
6	$L(\alpha = \pi/4) = L_{max} = \frac{V^2}{g}$	Максимальная дальность полета снаряда.
7	$L_1 > L_{max} = \frac{V^2}{g} \;\Rightarrow$ решений нет	Случай 1. Невозможность попадания в случае, если мишень расположена дальне, чем максимальная дальность полета
8	$L_2 = L_{max} = \frac{V^2}{g} \;\Rightarrow \sin(2\alpha) = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4}$	Случай 2. Расстояние, соответствующее существованию одного решения задачи.

9	$L_3 = L_{max} < \dfrac{V^2}{g} \quad \Rightarrow \sin(2\alpha) = \dfrac{gL}{V^2} \quad \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\left(\dfrac{gL}{V^2}\right) \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\left(\dfrac{gL}{V^2}\right) \end{array}\right. \quad \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{gL}{V^2}\right) \\ \alpha = \pi/2 - \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{gL}{V^2}\right) \end{array}\right.$	Случай 3. Расстояние, соответствующее существованию двух решений задачи. Первое из приведенных решений соответствует настильной траектории снаряда, второй – навесной.
Ответ: если $L > \frac{V^2}{g}$ – решений нет (поразить цель из орудия невозможно); если $L = \frac{V^2}{g}$, выстрел надо производить под углом 45^0; если $L < \frac{V^2}{g}$, стрелять следует под углом $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gL}{V^2}\right)$ или под углом $\alpha = \pi/2 - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gL}{V^2}\right)$.		

Задача 5.2. На горизонтальном полу стоит стол высотой H. По его поверхности со скоростью V скользит шайба, падающая на пол с края стола и продолжающая «скакать» по полу. В результате каждого удара о пол шайба отскакивает под углом, равным углу падения, но ее скорость уменьшается в $\alpha > 1$ раз по сравнению с величиной скорости падения. На какое расстояние шайба «отпрыгает» от стола?

<u>*Идея решения:*</u> Рассчитать расстояние, пролетаемое шариком на n-ом отскоке от пола и просуммировать эти расстояния, воспользовавшись известной формулой для суммы членов геометрической прогрессии.

1		Рисунок, поясняющий решение задачи.
2	$\begin{cases} S_0 = Vt_0 \\ H = \dfrac{gt_0^2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S_0 = V\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	Расстояние, которое пролетит шайба за время падения t_0 от края стола до первого удара о пол.

3	$u = gt_0 = \sqrt{2gH}$	Вертикальная составляющая скорости шайбы в момент ее первого падения на пол.
4	$u_1 = \frac{U}{\alpha};\ V_1 = \frac{V}{\alpha};$	Вертикальная и горизонтальная составляющие скорости шайбы после первого отскока.
5	$u_n = \frac{u_{n-1}}{\alpha} = \cdots = \frac{u_1}{\alpha^n};\ V_n = \frac{V_{n-1}}{\alpha} = \cdots = \frac{V}{\alpha^n};$	Вертикальная и горизонтальная составляющие скорости шайбы после с номером n.
6	$0 = u_n t_n - \frac{g t_n^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{2u_n}{g}$	Время полета шайбы после отскока с номером n.
7	$S_n = V_n t_n = V_n \frac{2u_n}{g} = \frac{2Vu}{g}\frac{1}{\alpha^{2n}} = \sqrt{8H/g}\, V \frac{1}{\alpha^{2n}}$	Дальность полета шайбы после отскока с номером n.
8	$S_1 + S_2 + \cdots == 2V\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ \dots\right) =$ $= 2V\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1}{\alpha^2 - 1}$	Суммирование геометрической прогрессии.
9	$S_2 = \frac{2V}{g}\frac{U}{\alpha^4}; \qquad S_3 = \frac{2V}{g}\frac{U}{\alpha^6};\ \dots$	Аналогично находим расстояние $S_2, S_3, \dots$
10	$S = S_0 + (S_1 + S_2 + \cdots) = V\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$	Учет расстояния между столом и точкой первого удара

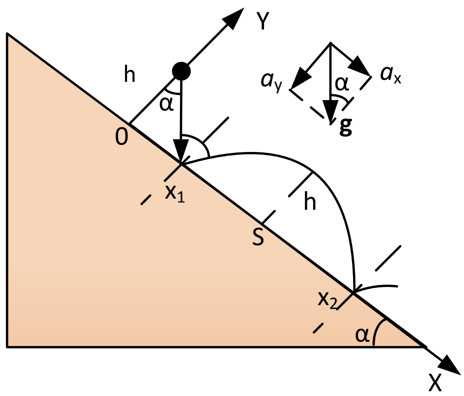
Ответ:

$$S = V\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$$

Задача 5.3. Небольшой шарик падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом и начинает прыгать по ней, упруго отражаясь при каждом ударе. Найти расстояние между токами первого и 25-го удара шарика и наклонную плоскость.

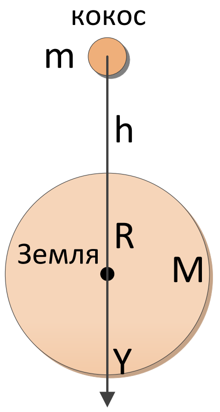
Идея решения: рассмотреть движение в системе координат, одна из осей которой направлена вдоль наклонной плоскости, а другая перпендикулярна к ней. Тогда движения по каждой из осей будет равноускоренным, зато упрощается учет соударения.

1		Рисунок, поясняющий решение

		задачи
2	$a_x = g\sin\alpha,\;\; a_y = g\cos\alpha$	Проекции ускорения на оси «косой» системы координат.
3	$h,\;\; t_1 = \sqrt{2h/g}$	Время до первого удара о наклонную плоскость.
4	$x_1 = \dfrac{a_x t_1^2}{2};$	*x*- координата первого удара
5	$\begin{cases} x_2 = \dfrac{a_x t_2^2}{2} \\ t_2 = 3t_1 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = 9\,\dfrac{a_x t_1^2}{2}$	*x*- координата второго удара (время от начала падения до него в 3 раза больше, чем до первого удара: тело летит «вниз» + «вверх» + «вниз».
6	$S_2 = x_2 - x_1 = 4a_x t_1^2 = 8h\sin\alpha$	Расстояние между точками первого и второго ударов.
7	$x_n = \dfrac{a_x t_n^2}{2} = \dfrac{a_x t_1^2}{2}(2n-1)^2$	*x*- координата удара с номером n
8	$S_n = x_n - x_1 = \dfrac{a_x t_1^2}{2}((2n-1)^2 - 1) =$ $= 4hn(n-1)\sin\alpha$	Общее выражение для расстояния между точками ударов с номерами *1 и n*.
9	$n = 25 \quad \Rightarrow \quad S_n = S_{25} = 24000h\sin\alpha$	Расстояние между точками первого и двадцать пятого ударов
	<u>*Ответ:*</u> расстояние между первой и двадцать пятой точками удара шарика о наклонную плоскость равно $\mathrm{S}_{25} = 24000\mathrm{h}\sin\alpha$	

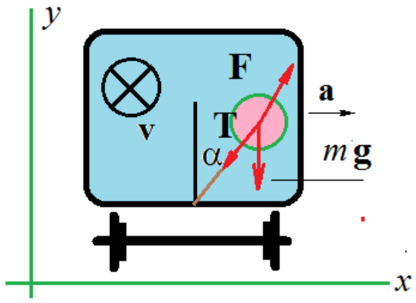
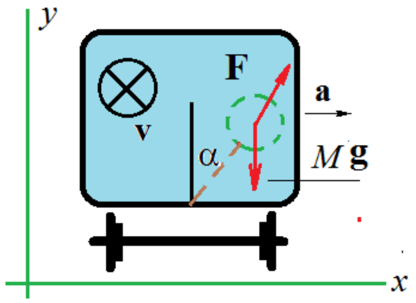
Задача 5.4. Кокосовый орех массой 1 кг срывается с пальмы, на которой он висел на высоте 30м над поверхностью земли. Какое расстояние пролетит планета Земля навстречу кокосу до момента их встречи из-за того, что падающий кокос притягивает к себе планету?

<u>Идея решения:</u> Рассмотрим движение Земли в системе отсчёта «кокос». Так как по III закону Ньютона Земля притягивается к кокосу с такой же силой, что и кокос к Земле, то можно найти ускорение Земли и далее найти расстояние, проходимое Землёй при равноускоренном её движении.

1		Рисунок, поясняющий решение задачи
2	$F = \frac{GMm}{(R+h)^2} \cong mg; \quad R \gg h;$ $Ma = mg \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{mg}{M}$	На Землю действует сила всемирного тяготения. Используем уравнения II закона Ньютона для Земли и найдём ускорение Земли.
3	$S_t = \frac{at_1^2}{2}; \qquad t_1 = t_2$ $h = \frac{gt_2^2}{2};$ $S = \frac{ah}{g} = \frac{mg}{M}\frac{a}{g} = \frac{mh}{M}$	Находим расстояние проходимое Землей из условия равенства времени движения Земли t_1 и кокоса t_2 до встречи.
4	Ответ: $S = \frac{mh}{M} = 5\ 10^{-24}$м	

1. **Задача 5.5.** Железнодорожный вагон движется со скоростью V по закругленному участку пути. К полу вагона нитью привязан шарик, наполненный гелием. Нить отклонена от вертикали вправо (относительно направления движения поезда) и составляет с вертикалью угол α. В какую сторону заворачивает вагон и чему равен радиус закругления?

<u>Идея решения:</u> В данной задаче нельзя пользоваться стандартной формулировкой закона Архимеда, поскольку она касается случая возникновения силы выталкивания из неподвижной жидкости или газа. В данной задаче воздух вагона движется вмести с ним ускоренно. Подробное решение данной задачи-можно найти в лекции №6.

1		Вагон с шариком, наполненным гелием. Его скорость **v** направлена «внутрь» рисунка. Железнодорожные пути заворачивают в ту же сторону, куда отклоняется шарик. Шарик отклоняется «в сторону поворота» из-за того, что более плотный воздух «стремится» прижаться к «внешней» стенке вагона. Сила Архимеда **F** определенно имеет направленную вверх составляющую (шарик висит в воздухе). О горизонтальной составляющей сказать что-либо «сходу» трудно….
2.	$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}$	Второй закон Ньютона для шарика, наполненного гелием.
3.		Если гелий в шарике мысленно заменить воздухом вагона, сила Архимеда останется прежней (подумайте, почему?), сила тяжести, действующая на шарик, увеличится (плотность воздуха больше плотности гелия), а сила натяжения нити обратится в ноль («кусок воздуха» в атмосфере не надо удерживать при помощи веревки).
4.	$M\mathbf{a} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}$	Второй закон Ньютона для «воздуха на месте шарика».
5.	$(m - M)\mathbf{a} = (m - M)\mathbf{g} + \mathbf{T}$	Результат вычитания уравнения (4) из (2).
6.	$\begin{cases} (m - M)\dfrac{v^2}{R} = -Tsin\alpha \\ 0 = (m - M)(-g) - Tcos\alpha \end{cases}$	Результат проектирования (5) на выбранные оси координат.
7.	$\dfrac{v^2}{Rg} = tg\alpha$	Результат деления уравнений системы (6)
8.	$R = \dfrac{v^2}{g} ctg\alpha$	Радиус закругления путей.
<u>Ответ:</u> железнодорожный путь заворачивает в сторону отклонения шарика; радиус закругления путей равен $R = (v^2/g)ctg\alpha$.		